Cálculo 3A – EP11 – Superfícies parametrizadas. Área de superfícies – Gabarito

Exercício 1: Seja S a superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = \left(u, v, 1-v^2\right)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq 1$.

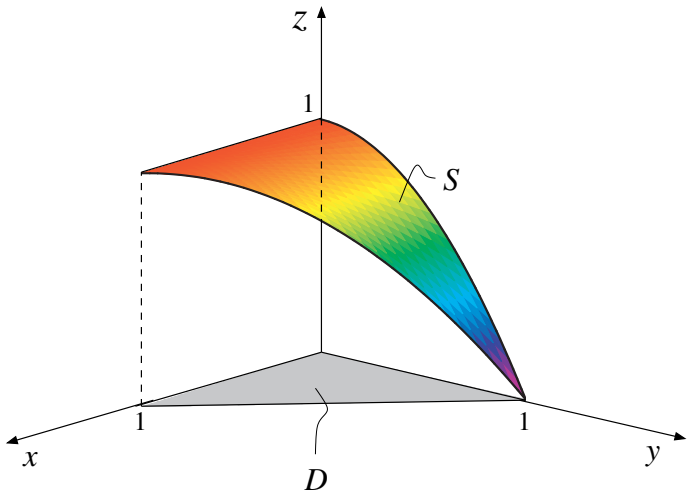
a) Desenhe S.

b) Determine o plano tangente a S no ponto $\varphi(1/2, 1/4)$.

c) Determine a área de S.

Solução:

a) Temos $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1-v^2 \end{cases}$ com $(u,v) \in D : u+v \leq 1$, $u \geq 0$ e $v \geq 0$ donde, eliminando os parâmetros, temos que $S : z = 1-y^2$ com $(x,y) \in D_{xy} : x+y \leq 1$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Logo, o esboço de S está representado na figura que se segue.



b) Temos $\varphi(1/2, 1/4) = (1/2, 1/4, 15/16)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (0,1,-2v)$ donde,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (0, 2v, 1).$$

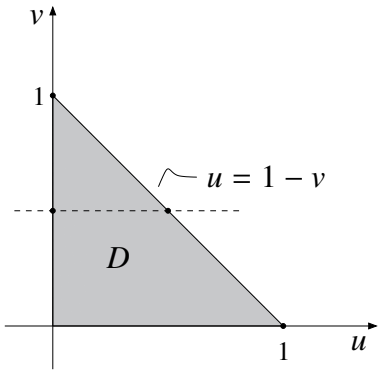
Logo, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(1/2, 1/4) = (0, 1/2, 1)$ é um vetor normal a S em $\varphi(1/2, 1/4)$. Portanto, uma equação do plano tangente a S em $\varphi(1/2, 1/4)$ é dada por

$$\left[(x,y,z) - \varphi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 0$$

ou $\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{4}, z - \frac{15}{16}\right) \cdot \left(0, \frac{1}{2}, 1\right) = 0$ ou, $y + 2z = \frac{17}{8}$.

c) Temos:

$$A(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv = \iint_D \sqrt{1+4v^2}\, dudv\,.$$



Enquadrando D como tipo II, temos que $D: \begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ 0 \le u \le 1-v \end{cases}$. Logo:

$$A(S) = \int_0^1 \int_0^{1-v} \sqrt{1+4v^2}\, dudv = \int_0^1 (1-v)\sqrt{1+4v^2}\, dv =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+4v^2}\, dv}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 v\sqrt{1+4v^2}\, dv}_{I_2}\,.$$

Cálculo de I_1

Fazendo $2v = \operatorname{tg}\theta$, temos $dv = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$. Para $\begin{cases} v = 0 \\ v = 1 \end{cases}$ temos $\begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \operatorname{arctg} 2 \end{cases}$. Então:

$$I_1 = \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta} \cdot \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \sec^3\theta\, d\theta\,.$$

Do Cálculo II, temos:

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) + C \quad \text{(Verifique!)}$$

Logo:

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)\right]_0^{\operatorname{arctg} 2}\,.$$

Fazendo $u = \operatorname{arctg} 2$ temos $\operatorname{tg} u = 2$. Então $\sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u = 5$, donde $\sec u = \sqrt{5}$ ou $\sec(\operatorname{arctg} 2) = \sqrt{5}$. Então:

$$I_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\,.$$

Cálculo de I_2

Temos que:

$$I_2 = \int_0^1 v\sqrt{1+4v^2}\,dv = \int_0^1 v\left(1+4v^2\right)^{1/2}\,dv\,.$$

Como $d\left(1+4v^2\right) = 8v\,dv$ então:

$$I_2 = \frac{1}{8}\int_0^1 \left(1+4v^2\right)^{1/2}\,d\left(1+4v^2\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1+4v^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)\,.$$

Assim:

$$A(S) = I_1 - I_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \frac{1}{12}\ \ u.a.$$

Exercício 2: Esboce e parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:

a) $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z\geq 1\right\}$.

b) $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ z = \sqrt{3(x^2+y^2)},\ x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$.

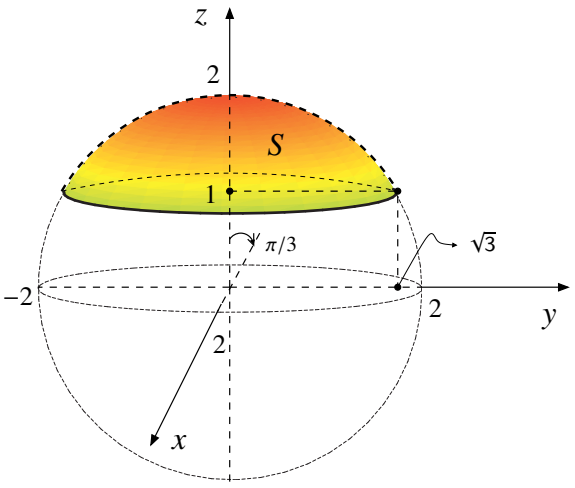
c) $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x+y+z = 2,\ x^2+y^2\leq 1\right\}$.

d) $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2 = 4,\ 0\leq z\leq 2+\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right\}$.

e) $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x^2+y^2 = 2y,\ 0\leq z\leq x^2+y^2\right\}$.

Solução:

a) A superfície S está ilustrada na figura a seguir.

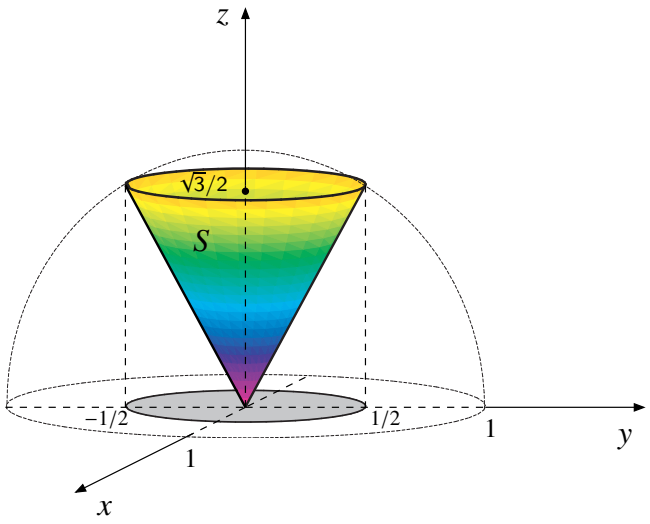


Usando ϕ e θ como parâmetros, temos $S\ :\ \varphi(\phi,\theta) = (2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\phi)$, com $0\leq\phi\leq\pi/3$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$. Também podemos definir S usando as coordenadas retangulares x e y. Temos $S\ :\ \varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{4-x^2-y^2}\right)$, com $(x,y)\in D\ :\ x^2+y^2\leq 3$. Uma outra forma de definir S é usando as coordenadas r e θ. Temos $S\ :\ \varphi(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{4-r^2}\right)$, com $0\leq r\leq\sqrt{3}$ e $0\leq\theta\leq 2\pi$.

b) Encontremos a interseção das duas superfícies:

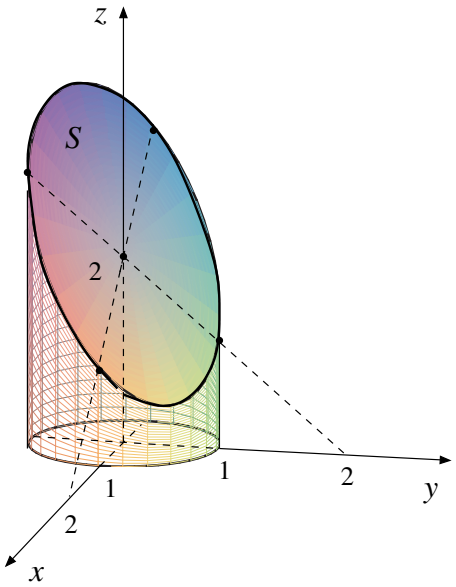
$$\begin{cases} z = \sqrt{3(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2+3(x^2+y^2) = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elas se interceptam segundo uma circunferência contida no plano horizontal $z = \sqrt{3}/2$, de centro $\left(0, 0, \sqrt{3}/2\right)$ e raio $1/2$.



Usando as coordenadas x e y para definir S, temos $\varphi(x,y) = \left(x,\ y,\ \sqrt{3(x^2+y^2)}\right)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1/4$. Outra parametrização seria $S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{3}\,r)$, com $0 \leq r \leq 1/2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

c) O esboço de S pode ser visto na figura que se segue.



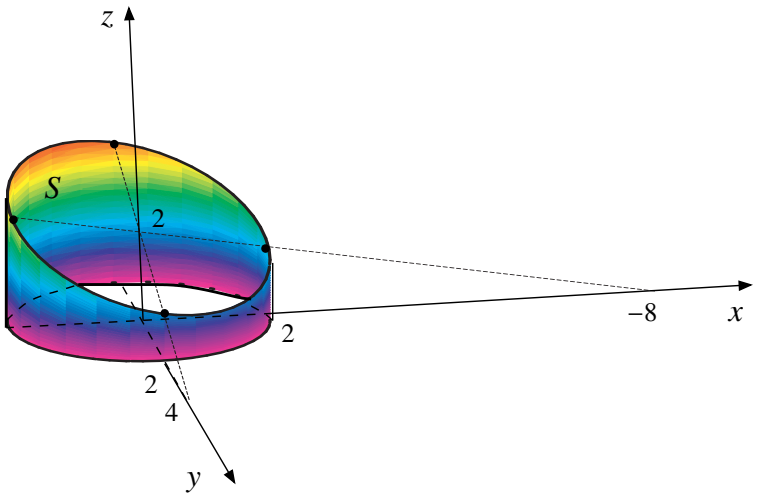
Uma parametrização é dada por $S : \varphi(x,y) = (x,\ y,\ 2-x-y)$, com $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1$. Outra parametrização seria $S : \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2-r\cos\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, com $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

d) O esboço de S está na figura ao lado.
Adotando θ e z como parâmetros, definimos S por

$$\varphi(\theta, z) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ z)$$

com

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 2 + \dfrac{\cos\theta}{2} - \operatorname{sen}\theta \end{cases}.$$



e) A superfície S está ilustrada na figura ao lado.
Seja $(x, y, z) \in S$. Então x e y satisfazem $x^2 + y^2 = 2y$ ou $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Logo,

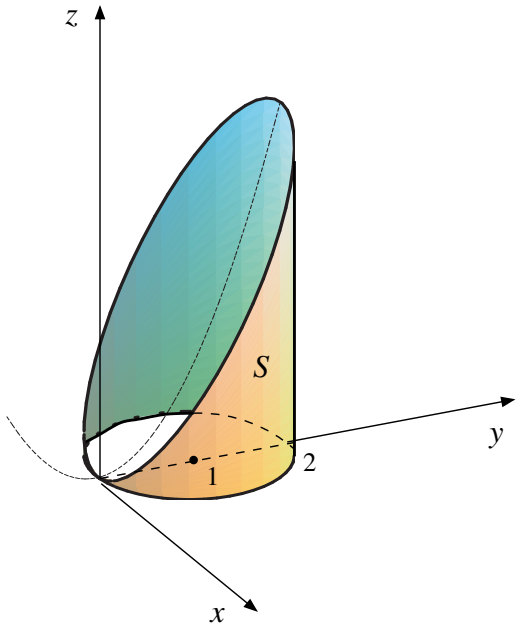
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases}$$

com $t \in [0, 2\pi]$.
Adotando t e z como parâmetros, temos a seguinte parametrização para S:

$$\varphi(t, z) = (\cos t,\ 1 + \operatorname{sen} t,\ z)$$

com

$$\begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le z \le 2(1 + \operatorname{sen} t) \end{cases}.$$



Exercício 3: Seja $C = \left\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (y-2)^2 = 1\right\}$. Ache a área da superfície gerada pela rotação do conjunto C em torno do eixo z.

Solução: Uma parametrização da curva C é dada por

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 2 + \cos t, \\ z(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Se $(x, y, z) \in S$ então (x, y, z) pertence à circunferência de raio $y(t) = 2 + \cos t$ e de centro $(0, 0, z(t)) = (0, 0, \operatorname{sen} t)$. Então

$$\begin{cases} x = (2 + \cos t)\cos\theta \\ y = (2 + \cos t)\operatorname{sen}\theta \\ z = z(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

com $0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Assim, uma parametrização de S é dada por

$$S : \varphi(t,\theta) = \big((2+\cos t)\cos\theta\,,\ (2+\cos t)\operatorname{sen}\theta\,,\ \operatorname{sen} t\big)$$

com

$$(t,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,. \end{cases}$$

Tem-se

$$\varphi_t = (-\operatorname{sen} t\cos\theta\,,\ -\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\theta\,,\ \cos t)$$
$$\varphi_\theta = \big(-(2+\cos t)\operatorname{sen}\theta\,,\ (2+\cos t)\cos\theta\,,\ 0\big)$$

donde

$$\varphi_t \times \varphi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -\operatorname{sen} t\cos\theta & -\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\theta & \cos t \\ -(2+\cos t)\operatorname{sen}\theta & (2+\cos t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \big(-(2+\cos t)\cos t\cos\theta\,,\ -(2+\cos t)\cos t\operatorname{sen}\theta\,,\ \underbrace{-(2+\cos t)\operatorname{sen} t\cos^2\theta - (2+\cos t)\operatorname{sen} t\operatorname{sen}^2\theta}_{=\,-(2+\cos t)\operatorname{sen} t}\big)$$

$$= (2+\cos t)\,(-\cos t\cos\theta, -\cos t\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen} t)\ .$$

Logo:

$$\|\varphi_t \times \varphi_\theta\| = (2+\cos t)\sqrt{\underbrace{\cos^2 t\cos^2\theta + \cos^2 t\operatorname{sen}^2\theta}_{=\,\cos^2 t} + \operatorname{sen}^2 t} =$$

$$= (2+\cos t)\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = 2+\cos t\,.$$

Como

$$A(S) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_\theta\|\ dtd\theta$$

então

$$A(S) = \iint_D (2+\cos t)\ dtd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2+\cos t)\ dtd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[2t + \operatorname{sen} t\Big]_0^{2\pi} d\theta = 4\pi\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi^2 \quad u.a.$$

Exercício 4: Seja S a superfície obtida girando-se o segmento de reta de $(0,1,3)$ a $(0,3,1)$ em torno do eixo z.

a) Dê uma parametrização de S.

b) Calcule a área de S.

Solução:

a) O segmento de reta de $(0,1,3)$ a $(0,3,1)$ é parametrizado por

$$\gamma(t) = (0,1,3) + t\,((0,3,1) - (0,1,3)) = (0, 1+2t, 3-2t)\,,$$

com $0 \le t \le 1$. Logo, $x(t) = 0$, $y(t) = 1 + 2t$ e $z(t) = 3 - 2t$, com $0 \le t \le 1$.

A superfície de revolução tem como parametrização:

$$\varphi(t,\theta) = (y(t)\cos\theta, y(t)\,\mathrm{sen}\,\theta, z(t)) = ((1+2t)\cos\theta, (1+2t)\,\mathrm{sen}\,\theta, 3-2t)$$

com

$$(t,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}.$$

b) Temos que $A(S) = \iint_D \|\varphi_t \times \varphi_\theta\|\, dt d\theta$ onde

$$\begin{aligned} \varphi_t \times \varphi_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2\cos\theta & 2\,\mathrm{sen}\,\theta & -2 \\ -(1+2t)\,\mathrm{sen}\,\theta & (1+2t)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \Big(2(1+2t)\cos\theta, 2(1+2t)\,\mathrm{sen}\,\theta, \underbrace{2(1+2t)\cos^2\theta + 2(1+2t)\,\mathrm{sen}^2\,\theta}_{2(1+2t)}\Big) \\ &= 2(1+2t)(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 1) \end{aligned}$$

donde $\|\varphi_t \times \varphi_\theta\| = 2(1+2t)\sqrt{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta + 1} = 2\sqrt{2}(1+2t)$.

Logo:

$$A(S) = \iint_D 2\sqrt{2}(1+2t)\, dt d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+2t)\, d\theta dt =$$

$$= 4\pi\sqrt{2}\int_0^1 (1+2t)\, dt = 4\pi\sqrt{2}\Big[t + t^2\Big]_0^1 = 8\pi\sqrt{2}\ \ u.a.$$

Exercício 5: Determine a área do parabolóide $z = 2\left(x^2 + y^2\right)$, abaixo do plano $z = 8$.

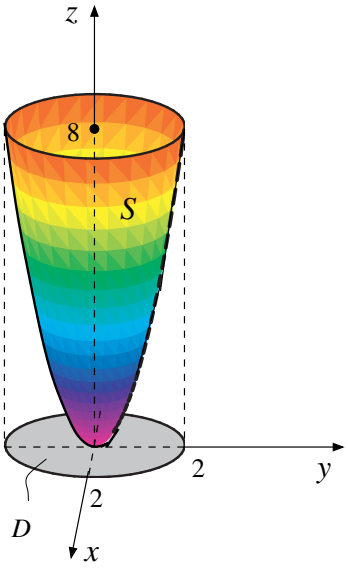
Solução: O esboço da superfície S pode ser visto na figura a seguir.

Definimos S da seguinte maneira:

$$S\ : z = 2\left(x^2 + y^2\right) = f(x,y)\,,$$

com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \le 4$. Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$



então:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}\, dx\, dy\,.$$

Em coordenadas polares, temos:

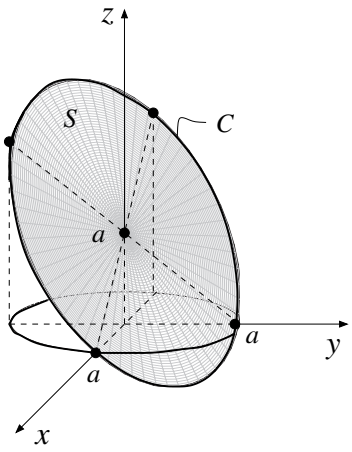
$$A(S) = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{1 + 16r^2}\; r\, dr\, d\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1 + 16r^2)^{1/2}\, r\, d\theta dr =$$

$$= \frac{2\pi}{32} \int_0^2 (1 + 16r^2)^{1/2} d(1 + 16r^2) = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{2}{3}\Big[(1 + 16r^2)^{3/2}\Big]_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{24}(65\sqrt{65} - 1)\;\; u.a.$$

Exercício 6: Calcule a área da superfície S parte do plano $x+y+z = a$, interior ao cilindro $x^2+y^2 = a^2$.

Solução: A superfície S está ilustrada na figura ao lado. Temos



$$S\,:\, z = a - x - y = f(x,y)\,,$$

com $(x,y) \in D : x^2 + y^2 \le a^2$. Como

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

então

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dx\, dy = \sqrt{3} \iint_D dx\, dy = \sqrt{3}\, A(D) \;=\; \sqrt{3}\,\pi\, a^2\;\; u.a.$$

Exercício 7: Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x-2)^2 + 4y^2 \le 1$.

Solução: Tem-se $S : z = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=f(x,y)}$, com $(x,y) \in D : (x-2)^2 + 4y^2 \leq 1$. Como S é o gráfico de $z = f(x,y)$,com $(x,y) \in D$, usaremos a fórmula

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy\,.$$

Tem-se:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Logo:

$$\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}\,.$$

Então:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}\,A(D)\,.$$

Como D é uma elipse com $a = 1$, $b = 1/2$, então

$$A(D) = \pi ab = \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Logo:

$$A(S) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad u.a.$$

Exercício 8: Determine a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cortada pela parte superior do cone $x^2 + y^2 = z^2$.

Solução: De $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $x^2+y^2 = z^2$ temos $x^2+y^2 = 2$ e $z = \sqrt{2}$. Logo, a curva interseção das superfícies é a circunferência $x^2+y^2 = 2$ contida no plano $z = \sqrt{2}$. O esboço de S está representado na figura a seguir.

Uma parametrização de S é: $S : \varphi(\phi,\theta) = (2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\phi)$ com

$$(\phi,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Da aula 19, temos que $dS = 4\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi d\theta$. Como $A(S) = \iint_D dS$ então

$$A(S) = \iint_D 4\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\phi\, d\theta d\phi = 8\pi\int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\,\phi\, d\phi =$$
$$= 8\pi[-\cos\phi]_0^{\pi/4} = 8\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(8 - 4\sqrt{2}\right) \quad u.a.$$

,,

,,,,